

文章编号: 1000-8055(2009)12-2839-06

# 螺旋锥齿轮振动研齿系统的拍击响应

杨建军<sup>1,2</sup>, 邓效忠<sup>1</sup>, 方宗德<sup>2</sup>

(1. 河南科技大学 机电工程学院, 洛阳 471003;

2. 西北工业大学 机电学院, 西安 710072)

**摘 要:** 建立了位移激励下的螺旋锥齿轮振动研齿系统的扭转振动模型, 推导出考虑摩擦的轮齿斜碰撞前后状态间的局部映射关系式, 得到了螺旋锥齿轮振动研齿系统的 Lyapunov 指数计算方法. 通过算例, 运用相图、Poincaré 映射图、Lyapunov 指数和系统分叉图, 分析了研齿系统随激励参数变化的动态响应, 结果表明, 随激励幅值的增大, 研齿系统由单边碰撞状态经倍周期分叉进入混沌, 并在混沌状态中有周期窗口的出现. 继续增大激励幅值, 系统进入了双边碰撞状态.

**关 键 词:** 螺旋锥齿轮; 振动研齿; 斜碰撞; 局部映射; Lyapunov 指数

中图分类号: TH113.1

文献标识码: A

## Ratting response of vibration lapping of spiral bevel gear

YANG Jiarjun<sup>1,2</sup>, DENG Xiaozhong<sup>1</sup>, FANG Zongde<sup>2</sup>

(1. School of Mechatronics Engineering,

Henan University of Science and Technology, Luoyang 471003, China;

2. School of Mechanical Engineering,

Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**Abstract:** The torsional vibration model of vibration lapping process for spiral bevel gear under displacement excitation was established, and the method of local maps between pre-impact and post-impact states was introduced. The Poincaré map relation was deduced in consideration of the oblique impact vibration between teeth under the influence of sliding friction. The calculation method for Lyapunov exponent of vibration lapping system of spiral bevel gear was obtained. The dynamic response for a given gear lapping system with the change of excitation parameter was analyzed by employing phase plane plots, Poincaré map, Lyapunov exponent and bifurcation plot compositely. The results show that, with the increase of excitation amplitude, the gear lapping system exhibits a period from doubling route to chaos in single-side tooth impact state, and the period window can be found in chaotic region. With the continued increase of excitation amplitude, a double-side tooth impact phenomenon of the lapping system appears.

**Key words:** spiral bevel gear; vibration gear lapping; oblique impact; local map; Lyapunov exponent

螺旋锥齿轮广泛用于航空航天、车辆和工程机械传动中, 其研齿加工<sup>[1]</sup>对于提高螺旋锥齿轮

的传动质量有着至关重要的意义. 螺旋锥齿轮的振动研齿加工方法是通过在驱动轮小轮上施加一

收稿日期: 2008-12-08; 修订日期: 2009-02-14

基金项目: 国家自然科学基金(50675061)

作者简介: 杨建军(1971-), 男, 河南洛阳人, 博士生, 研究方向为螺旋锥齿轮的制造和齿轮系统动力学.

定频率的扭转振动, 同时在被动轮大轮上施加轻载制动扭矩实现的. 如果施加的频率增大到超声频率, 就构成了超声振动研齿<sup>[2]</sup>. 在轻载作用下, 对于含齿侧间隙的振动研齿加工, 研齿过程中, 轮齿之间能产生拍击振动, 分析研齿过程中动态响应对控制研齿质量有重要意义. Karagiannis, Pfeiffer, Feng Q 等<sup>[3-5]</sup>, 都对齿轮的拍击振动进行了研究, 指出在轻载或空载作用下, 含齿侧间隙的齿轮拍击振动具有混沌性质. 董海军, 张锁怀等<sup>[6-7]</sup>对主动轴转速波动和含齿侧间隙下的单级齿轮的拍击振动进行了研究, 推导出了两次碰撞之间的映射关系.

本文利用局部映射分析方法, 对具有双侧约束的螺旋锥齿轮振动研齿系统进行分析, 计算了其 Lyapunov 指数, 分析了研齿系统的动态响应, 并通过算例进行了验证.

1 螺旋锥齿轮研齿系统的动力模型

1.1 轮齿脱啮时的运动方程建立

对于螺旋锥齿轮振动研齿系统, 由于研齿时施加在大轮上的制动扭矩较小, 所以在研齿时忽略轴向振动和扭摆振动, 只考虑扭转振动<sup>[8-9]</sup>. 在轮齿碰撞之前, 两齿轮处于脱啮状态, 在制动扭矩作用下, 进入齿背碰撞或齿面碰撞状态, 然后又重新进入脱啮状态, 因此研齿系统是一个双侧约束的碰撞系统. 假设振动研齿的驱动轮为小轮, 其上施加以正弦形式的扭转激励, 其振动频率和振动幅值大小由驱动装置决定, 从动齿轮大轮在脱啮时的动力学方程为

$$I_2 \ddot{\theta}_2 + c_2 \dot{\theta}_2 = -T_2 \tag{1}$$

这里  $I_2$  为转动惯量,  $c_2$  为扭转阻尼,  $T_2$  为常数滞后力矩,  $\theta_2$  为角位移.

小轮和大轮在碰撞点的“基圆半径”为

$$r_i = \mathbf{n}_i \cdot (\mathbf{R} \times \mathbf{j}_i) \quad (i = 1, 2) \tag{2}$$

其中下标 1, 2 分别表示螺旋锥齿轮的小轮和大轮,  $\mathbf{R}$  是碰撞点上的位置矢量,  $\mathbf{j}$  为沿旋转轴的单位矢量,  $\mathbf{n}$  为碰撞点处齿面的单位法矢, 如图 1 所示.

由于  $r_1, r_2$  在接触路径上变化较小, 可以用齿面中点  $M$  处的值  $r_{m1}, r_{m2}$  代替. 用相对角位移  $\theta = \frac{r_{m1}}{r_{m2}}\theta_1 - \theta_2$ , 微分后带入式(1)可得到脱啮时研齿系统的动力学方程

$$I_2 \ddot{\theta} + c_2 \dot{\theta} = T_2 + I_2 \frac{r_{m1}}{r_{m2}} \ddot{\theta}_1 + c_2 \frac{r_{m1}}{r_{m2}} \dot{\theta}_1 \quad (|\theta| < \theta_0) \tag{3}$$

式中  $\theta_0$  是由法向齿侧间隙之半  $b$  转化后的角度间隙, 即  $\theta_0 = \frac{b}{r_{m2}}$ .

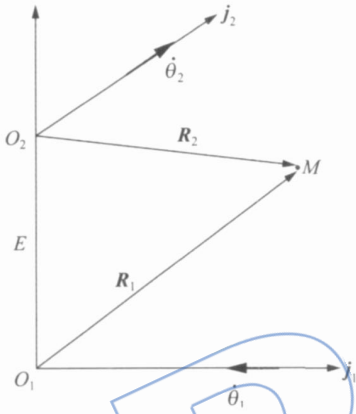


图 1 两齿面坐标位置关系  
Fig. 1 Coordinate systems applied for gear and pinion

假设小轮角位移波动是

$$\theta_1 = a \sin \omega t \tag{4}$$

其中  $a$  为小轮角位移振幅,  $\omega$  为激励的圆频率, 带入式(3)中, 得到

$$I_2 \ddot{\theta} + c_2 \dot{\theta} = T_2 - \frac{r_{m1}}{r_{m2}} I_2 a \omega^2 \sin \omega t + \frac{r_{m1}}{r_{m2}} c_2 a \omega \cos \omega t \quad (|\theta| < \theta_0) \tag{5}$$

对式(5)进行量纲归一化处理, 令  $\bar{t} = \omega t, \bar{\theta} = \frac{\theta}{\theta_0}$ ,

$\dot{\bar{\theta}} = \frac{\dot{\theta}}{\theta_0} \omega, \ddot{\bar{\theta}} = \frac{\ddot{\theta}}{\theta_0} \omega^2$  得到无量纲研齿系统脱啮时的动力学方程

$$\ddot{\bar{\theta}} + \frac{c_2}{I_2 \omega} \dot{\bar{\theta}} = \frac{T_2}{\theta_0 I_2 \omega^2} - \frac{r_{m1} a \sin \bar{t}}{b} + \frac{c_2 r_{m1} a \cos \bar{t}}{b I_2 \omega} \quad (|\bar{\theta}| < 1) \tag{6}$$

1.2 轮齿斜碰撞前后的相对角速度关系

螺旋锥齿轮研齿系统由脱啮状态进入轮齿碰撞状态时, 由于螺旋角的存在, 轮齿之间将发生斜碰撞<sup>[10]</sup>. 由于螺旋锥齿轮在相互接触时, 齿面间存在相对的滑移, 两齿面同时具有相对法向速度和相对切向速度, 对于准双曲面齿轮, 齿面间的相

对运动较弧齿锥齿轮更为剧烈, 因此在对轮齿碰撞过程进行分析时要考虑到齿面间的摩擦因素. 本节利用碰撞恢复系数的 Poisson 定义, 并借助冲量-动量矩定理来建立轮齿斜碰撞前后系统的状态关系.

小轮轮齿和大轮轮齿的碰撞过程分为压缩和恢复两个阶段, 轮齿碰撞时, 大轮和小轮可能产生沿齿面切向的相对滑移, 从而产生摩擦, 摩擦力的方向是啮合迹线的切线方向, 可以根据齿面接触分析(TCA)求得. 受初始碰撞状态的影响, 在碰撞过程中, 在齿面相对滑移过程中可能产生相对切向速度逆向, 设摩擦力的单位方向矢量为  $\mathbf{k}$ , 所以摩擦力的方向为  $\mathbf{k}$  或  $-\mathbf{k}$  方向. 碰撞接触过程中的相对切向速度逆向存在三种可能: 在齿面法向压缩阶段逆向, 在法向恢复阶段逆向和单方向滑动直至碰撞过程结束, 具体情况要根据碰撞的初始状态来判断. 为简化分析, 本文设轮齿碰撞过程中不发生切向速度逆向, 下标  $-$  和  $+$  分别表示碰撞前的状态和碰撞后的状态,  $o$  表示压缩结束时的状态, 小轮和大轮从碰撞前的状态到压缩结束时的状态的相互作用冲量-动量矩方程为

$$\begin{aligned} I_1(\dot{\theta}_{1o}-\dot{\theta}_{1-}) &= \\ &-P[r_{m1}+\mathbf{k}\cdot(\mathbf{R}_1\times\mathbf{j}_1)\operatorname{sgn}(\dot{\theta}_{1-})] \\ I_2(\dot{\theta}_{2o}-\dot{\theta}_{2-}) &= \\ &P[r_{m2}+\mathbf{k}\cdot(\mathbf{R}_2\times\mathbf{j}_2)\operatorname{sgn}(\dot{\theta}_{2-})] \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $P$  为压缩阶段的法向冲量,  $\mu$  为摩擦系数,  $\operatorname{sgn}$  为符号函数, 将式(7)按照上一小节的方法进行无量纲化, 得到

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_{1o}-\dot{\theta}_{1-} &= \\ &-\frac{P}{I_1\dot{\theta}_o}\int r_{m1}+\mathbf{k}\cdot(\mathbf{R}_1\times\mathbf{j}_1)\operatorname{sgn}(\dot{\theta}_{1-})\mathrm{d}t=-M_1P \\ \dot{\theta}_{2o}-\dot{\theta}_{2-} &= \\ &\frac{P}{I_2\dot{\theta}_o}\int r_{m2}+\mathbf{k}\cdot(\mathbf{R}_2\times\mathbf{j}_2)\operatorname{sgn}(\dot{\theta}_{2-})\mathrm{d}t=M_2P \end{aligned} \quad (8)$$

在压缩结束时, 满足法向相对速度为 0, 即

$$\frac{r_{m1}}{r_{m2}}\dot{\theta}_{1o}-\dot{\theta}_{2o}=0 \quad (9)$$

将式(9)带入到式(8), 可以求得压缩阶段的法向冲量

$$P=\frac{\dot{\theta}_{1-}r_{m1}-\dot{\theta}_{2-}r_{m2}}{\frac{r_{m1}}{M_1}+\frac{r_{m2}}{M_2}} \quad (10)$$

在恢复阶段, 设 Poisson 恢复系数为  $\varepsilon$ , 则恢复阶段的法向冲量为  $\varepsilon P$ . 在式(7)中, 用  $\varepsilon P$  替换  $P$ ; 用  $\dot{\theta}_{1+}, \dot{\theta}_{2+}$  替换  $\dot{\theta}_{1o}, \dot{\theta}_{2o}$ ; 用  $\dot{\theta}_{1o}, \dot{\theta}_{2o}$  替换  $\dot{\theta}_{1-}, \dot{\theta}_{2-}$ . 可以得到碰撞恢复阶段的冲量-动量矩方程, 可以推导出轮齿碰撞前后量纲归一化后的相对角速度的关系, 即

$$\dot{\theta}_+=\dot{\theta}_{2+}-\frac{r_{m1}}{r_{m2}}\dot{\theta}_{1+}=-\varepsilon\left(\dot{\theta}_{2-}-\frac{r_{m1}}{r_{m2}}\dot{\theta}_{1-}\right)=-\varepsilon\dot{\theta}_- \quad (11)$$

1.3 螺旋锥齿轮振动研齿系统的动力模型的建立

综合式(6)和式(11), 可以得到螺旋锥齿轮研齿系统的动力学模型

$$\begin{cases} \ddot{\theta}+\frac{c_2}{I_2}\dot{\theta}= \\ \frac{T_2}{\dot{\theta}_oI_2\omega^2}-\frac{r_{m1}a\sin\bar{t}}{b}+\frac{c_2r_{m1}a\cos\bar{t}}{bI_2\omega} \quad (|\bar{\theta}|<1) \\ \dot{\theta}_+=-\varepsilon\dot{\theta}_- \quad (|\bar{\theta}|\geq 1) \end{cases} \quad (12)$$

令

$$k=\frac{c_2}{I_2\omega}, \quad \frac{r_{m1}a}{b}=u, \quad \frac{T_2}{\dot{\theta}_oI_2\omega^2}=\gamma$$

则式(12)的第一式化为

$$\ddot{\theta}+k\dot{\theta}=\gamma-usin\bar{t}+ukcos\bar{t} \quad (13)$$

将式(13)表示为三维非自治系统得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\bar{t}}\begin{bmatrix}\bar{\theta} \\ \dot{\theta} \\ \bar{t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{\theta} \\ -k\dot{\theta}+A \\ 1\end{bmatrix}$$

其中

$$A=\gamma-usin\bar{t}+ukcos\bar{t} \quad (14)$$

简单记为

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}=\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}), \quad \text{其中 } \bar{\mathbf{x}}=[\bar{\theta}, \dot{\theta}, \bar{t}]^T \quad (15)$$

2 轮齿碰撞的切换映射分析方法

2.1 碰撞面处的局部映射<sup>[11-12]</sup>

对于齿轮拍击系统, 为了分析系统在碰撞前后的运动状态, 取碰撞面为 Poincaré 截面, 能更直接地反映研齿系统轨线与分界面的关系和系统的动态响应.

由于碰撞过程包括了从脱啮区跳入碰撞面,

碰撞面上的碰撞, 以及从碰撞面跳出到脱啮区三个局部切换过程, 按照碰撞映射的计算方法, 设齿轮的碰撞点为  $c$ , 碰撞时刻为  $\bar{t}_c$ , 在碰撞面处系统轨线的局部映射<sup>[11-12]</sup> 计算如下:

1) 从脱啮区跳入碰撞面的局部映射

$$P_{\alpha}:\left(\bar{\theta}_c,\dot{\bar{\theta}}_c\right)^T\rightarrow\left(\dot{\bar{\theta}}_-, \bar{t}_c\right)^T$$

定义轮齿碰撞面

$$h_{\alpha}(\bar{\theta}_c,\dot{\bar{\theta}}_c,\bar{t}_c)=\bar{x}_c$$

可以得到其 Jacobian 矩阵

$$J_{\alpha}=-\frac{1}{\dot{\bar{\theta}}_-}\begin{bmatrix}A-k\dot{\bar{\theta}}_-&-\dot{\bar{\theta}}_-\\1&0\end{bmatrix}$$

2) 碰撞面  $h_{\alpha}$  上的碰撞映射

$$P_o:\left(\dot{\bar{\theta}}_-, \bar{t}_c\right)^T\rightarrow\left(\dot{\bar{\theta}}_+, \bar{t}_c\right)^T$$

由于碰撞面是一个由位移约束的刚性约束面, 碰撞映射的关键是基于 Poisson 恢复系数的齿面相对速度反向, 根据式 (14), 可以得到其 Jacobian 矩阵为

$$J_o=\begin{bmatrix}-\varepsilon&0\\0&1\end{bmatrix}$$

其中  $\varepsilon$  为 Poisson 恢复系数.

3) 从碰撞面跳出到脱啮区的局部映射

$$P_{\beta}:\left(\dot{\bar{\theta}}_+, \bar{t}_c\right)^T\rightarrow\left(\bar{\theta}_c,\dot{\bar{\theta}}_c\right)^T$$

这个过程可以看作是从脱啮区跳入碰撞面的逆过程, 因此其 Jacobian 矩阵为  $J_{\alpha}$  的逆矩阵, 即

$$J_{\beta}=\begin{bmatrix}0&-\dot{\bar{\theta}}_+\\1&k\dot{\bar{\theta}}_+-A\end{bmatrix}$$

因此综合起来碰撞时刻总的映射为

$$J_c=J_{\beta}\cdot J_o\cdot J_{\alpha}\tag{16}$$

在非碰撞状态时, 其系统流的映射是光滑, 其 Jacobian 矩阵  $J_y$  可以根据多元函数的求导法则得到.

当齿轮拍击振动系统处于单边碰撞状态时, 其复合映射可以表示为

$$J=J_y\cdot J_c\tag{17}$$

当齿轮系统处于双边碰撞状态时, 其复合映射可以表示为:

$$J=J_y\cdot J_{cf}\cdot J_y\cdot J_{cb}\tag{18}$$

其中下标 f 表示齿面碰撞, 下标 b 表示齿背碰撞.

2 2 齿轮拍击系统的 Lyapunov 指数计算

Lyapunov 指数是衡量系统动力学特性的一个重要定量指标, 它表征了系统在相空间中相邻轨道间收敛或发散的指数率. 对于系统是否存在动力学混沌, 可以从最大 Lyapunov 指数是否大于零直观的判断出来.

为了计算齿轮拍击系统的 Lyapunov 指数, 将式 (8) 和式 (9) 所描述的齿轮系统表示为离散动力系统, 设系统在非碰撞状态时, 两个相近轨道的初始扰动为  $\delta\bar{x}^{(0)}$ , 初始点为  $\bar{x}^{(0)}$ , 按照复合映射式 (17) 或 (18) 确定的 Jacobian 矩阵, 进行一次迭代, 可以得到一个  $\delta\bar{x}^{(1)}$ , 进行  $k$  次迭代后可以得到

$$\delta\bar{x}^{(k)}=J(\bar{x}^{(k-1)})\delta\bar{x}^{(k-1)}$$

即

$$\delta\bar{x}^{(k)}=J(\bar{x}^{(k-1)})J(\bar{x}^{(k-2)})\cdots J(\bar{x}^{(0)})\delta\bar{x}^{(0)}$$

当迭代次数足够大时, 按照离散动力系统 Lyapunov 指数的计算方法可以得到齿轮拍击系统的 Lyapunov 指数.

3 实例分析

以一对准双曲面齿轮研齿系统为例进行说明, 齿轮的基本参数如表 1 所示.

表 1 基本计算参数

Table 1 Basic calculation parameters

| 参数                                      | 数值      |
|-----------------------------------------|---------|
| 小轮齿数 $Z_1$                              | 10      |
| 大轮齿数 $Z_2$                              | 43      |
| 小轮偏置距 $E/\text{m}$                      | 0.031 8 |
| 齿侧间隙之半 $b/\text{mm}$                    | 0.2     |
| 小轮齿面中点“基圆半径” $r_{m1}/\text{m}$          | 0.048   |
| 大轮齿面中点“基圆半径” $r_{m2}/\text{m}$          | 0.168   |
| 阻尼比 $\xi$                               | 0.04    |
| 大轮转动惯量 $I_1/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$ | 0.05    |
| 小轮转动惯量 $I_2/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$ | 0.002   |

$u$  为无量纲的激励幅值, 把它作为变化量来研究研齿系统的动态响应, 小轮上给定频率为  $1200\text{rad/s}$  的正弦激励, 当  $u$  较小时, 研齿系统处于一种单边碰撞状态, 随着激励的增大, 系统的运动状态从单碰 1 周期运动, 依次经历单碰 2 周期, 单碰 4 周期..., 经倍周期分叉道路进入到混沌状态, 图 2 中 (a), (b), (c), (d) 分别对应无量纲激励幅值  $u$  为 0.0067, 0.0077, 0.0084, 0.0091 时,

单碰 1 周期,单碰 2 周期,单碰 4 周期和混沌运动状态的相图和 Poincaré 映射图,所对应的最大 Lyapunov 指数分别为  $-0.1859$ ,  $-0.0485$ ,  $-0.0218$ ,  $0.0101$ . 继续增大激励幅值,研齿系统由单边碰撞状态进入到齿面齿背交替碰撞的双边碰撞状态.

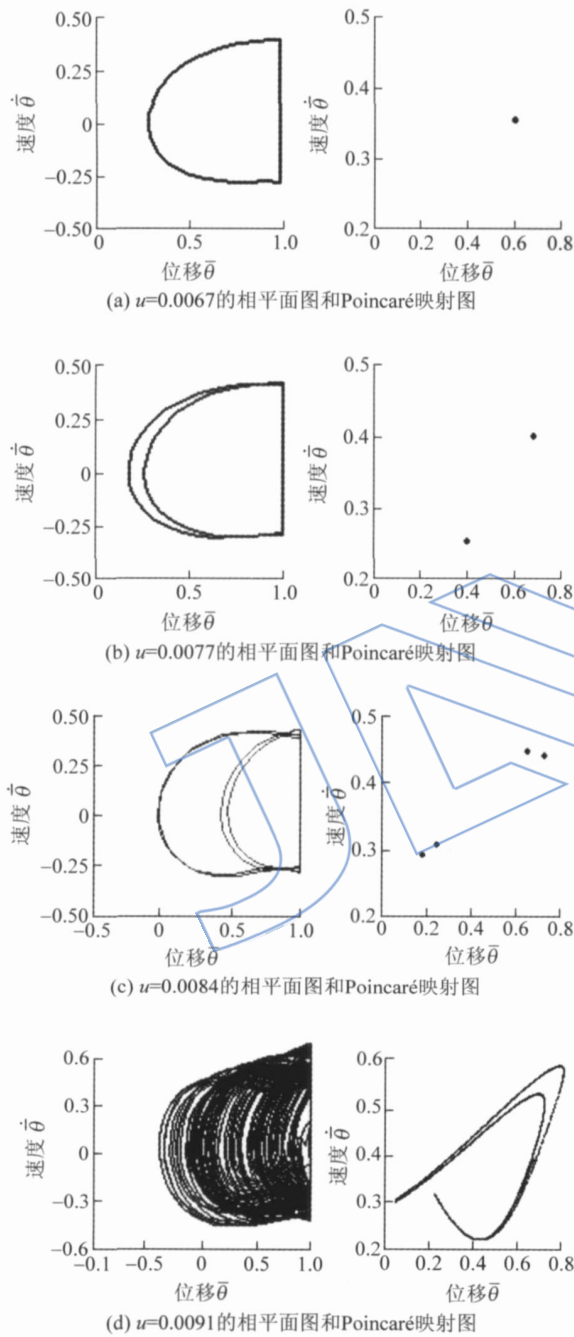


图 2 单边碰撞的动态响应

图 3 中(a), (b), (c), (d) 分别对应无量纲激励幅值  $u$  为  $0.01$ ,  $0.0168$ ,  $0.0174$ ,  $0.0178$  时,双碰 1 周期,双碰 2 周期,双碰 4 周期,混沌状态的

相图和 Poincaré 映射图,所对应的最大 Lyapunov 指数分别为  $-0.221$ ,  $-0.058$ ,  $-0.063$ ,  $0.008$ .

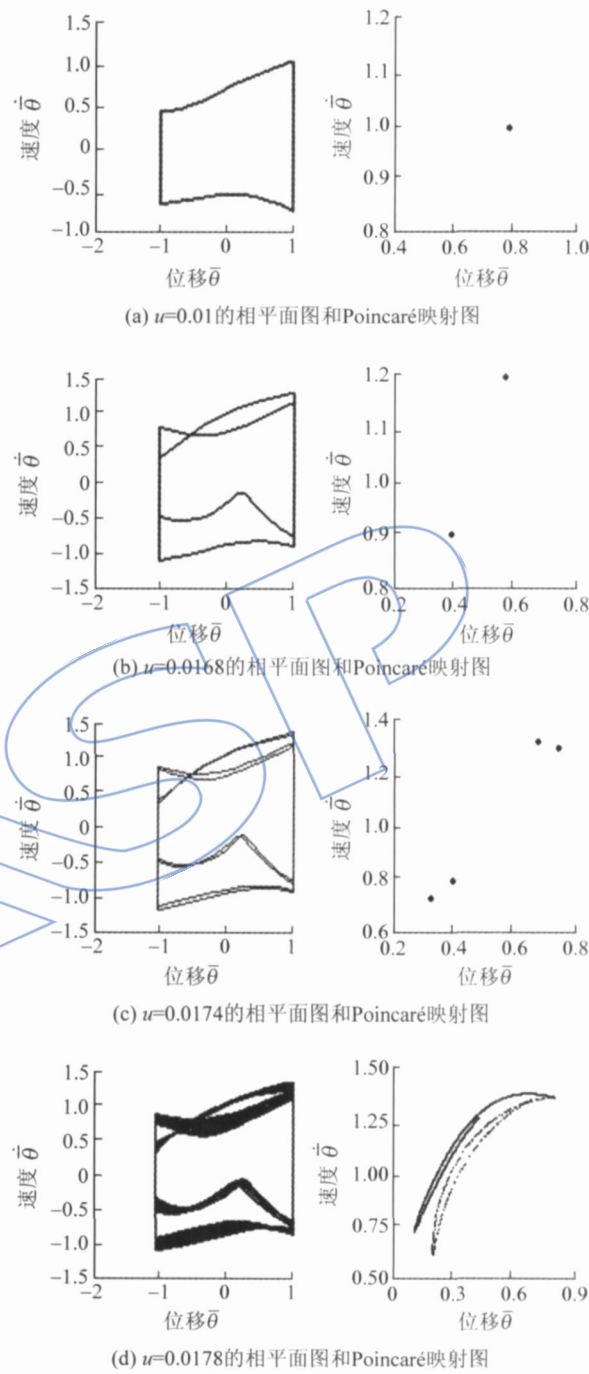


图 3 双边碰撞状态的动态响应

Fig. 3 Phase response of double-sided tooth impact

图 4 进一步给出了研齿系统随无量纲参数  $u$  变化的最大 Lyapunov 指数谱图,图中可以看到,当最大 Lyapunov 指数为  $0$  时,意味着研齿系统出现了分叉.图 5 是对应的系统分叉图,在单边碰撞的混沌运动状态中,出现了最大 Lyapunov 指数小于  $0$  的情况,意味着混沌运动状态中有周期窗口出现.

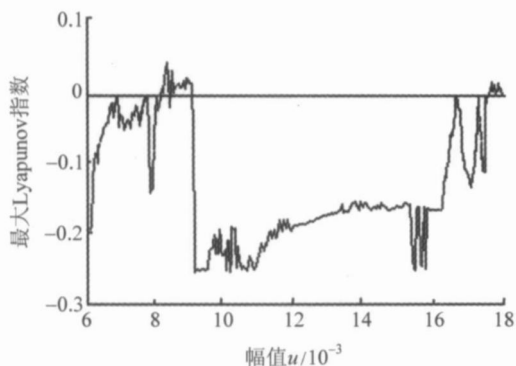


图4 系统随参数变化的最大Lyapunov指数谱

Fig. 4 Largest Lyapunov exponent as the function of  $u$

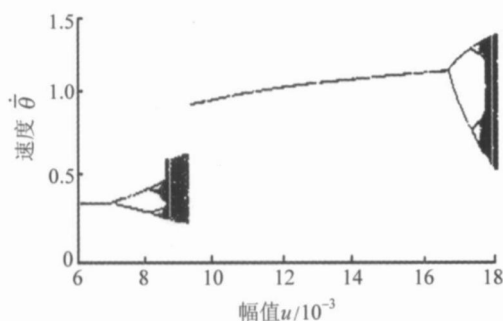


图5 系统随参数变化的分叉图

Fig. 5 Bifurcation diagram with respect to the parameter  $u$

## 4 结论

1) 在考虑齿侧间隙和主动轮角位移波动的情况下,建立了具有扭转自由度的螺旋锥齿轮研齿系统的动力学模型.

2) 根据带摩擦的刚性斜碰撞原理,引入了局部映射的分析方法,在轮齿碰撞点处建立了轮齿脱啮状态和碰撞状态间的映射关系.

3) 按照离散系统 Lyapunov 指数的计算方法,给出了螺旋锥齿轮研齿系统的 Lyapunov 指数的计算过程,通过一个算例,分析了随激励幅值的增大,研齿系统由单边碰撞状态进入到双边碰撞状态的相图和 Poincaré 映射图,计算了相应的最大 Lyapunov 指数,并给出了研齿系统随激励参数变化的最大 Lyapunov 指数谱图和对应的分叉图.

## 参考文献:

[1] Jiang Q, Gosselin C, Masseth J. Simulation of hypoid

gear lapping[J]. Journal of Mechanical Design, 2008, 130(11): 112601(10 pages).

[2] 魏冰阳, 邓效忠, 杨建军, 等. 超声研齿的材料去除机理与试验研究[J]. 中国机械工程, 2006, 17(10): 995-999

WEI Bingyang, DENG Xiaozhong, YANG Jianjun, et al. Study on material removal mechanism and experiments of ultrasonic lapping of gears[J]. China Mechanical Engineering, 2006, 17(10): 995-999 (in Chinese)

[3] Karagiannis K, Pfeiffer F. Theoretical and experimental investigations of gear rattling[J]. Nonlinear Dynamics, 1991, (2): 367-387.

[4] Pfeiffer F, Kunert A. Rattling models from deterministic to stochastic processes[J]. Nonlinear Dynamics, 1990, (1): 63-74

[5] Feng Q, Pfeiffer F. Stochastic model on a rattling system[J]. Journal of Sound and Vibration, 1998, 215(3): 439-453.

[6] 董海军, 沈允文, 邵志英. 转速激励下齿轮系统拍击振动的分叉特性[J]. 机械工程学报, 2006, 42(2): 168-172.

DONG Haijun, SHEN Yunwen, GAO Zhiying. Bifurcation character of rattling in the gear system under the excitation of the rotational speed fluctuation[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2006, 42(2): 168-172 (in Chinese)

[7] 张锁怀, 沈允文, 董海军, 等. 转速和不平衡质量对齿轮拍击振动的影响[J]. 航空动力学报, 2003, 18(1): 16-20

ZHANG Suohuai, SHEN Yunwen, DONG Haijun, et al. The influence of speed and mass unbalance on dynamic characteristics of a gear rattling system[J]. Journal of Aerospace Power, 2003, 18(1): 250-256 (in Chinese)

[8] WANG Jun, Lim T C, LI Mingfeng. Dynamics of a hypoid gear pair considering the effects of time varying mesh parameters and backlash nonlinearity[J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 308: 302-329

[9] 杨宏斌, 高建平, 邓效忠, 等. 弧齿锥齿轮和准双曲面齿轮的非线性动力学研究[J]. 航空动力学报, 2004, 19(1): 54-59

YANG Hongbin, GAO Jianping, DENG Xiaozhong, et al. Nonlinear dynamics of spiral bevel gears and hypoid gear drives[J]. Journal of Aerospace Power, 2004, 19(1): 54-59 (in Chinese)

[10] Han W, Jin D P, Hu H Y. Dynamics of an oblique impact vibrating system of two degrees of freedom[J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 275: 795-822

[11] Nordmark A B. Nonperiodic motion caused by grazing incidence in all impact oscillator[J]. Journal of Sound and Vibration, 1991, 145(2): 279-297.

[12] Jin L, Lu Q S, Twizell E H. A method for calculating the spectrum of Lyapunov exponents by local maps in non-smooth impact-vibrating systems[J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 298: 1019-1033